球面極座標によるラプラシアンの簡単な導出方法について

佐藤　博彦

2024 年 7 月 4 日

球面極座標 r, θ, ϕ とデカルト座標 x, y, z の関係は，新たな変数

$$\rho = r \sin\theta \tag{1}$$

を用いることにより，以下のように表すこともできる。

$$x = \rho\cos\phi \tag{2}$$
$$y = \rho\sin\phi \tag{3}$$
$$z = r\cos\theta \tag{4}$$

これらの逆変換は

$$\left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\phi = \dfrac{y}{x} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{\rho^2+z^2} \\ \tan\theta = \dfrac{z}{\rho} \end{array}\right. \tag{5}$$

である。このように表すと，x, y は ρ, ϕ の 2 変数関数，z は r, θ の 2 変数関数，ρ は r, ϕ の 2 変数関数なので計算が楽になる。

偏微分のチェーンルールより，まず

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{6}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\phi} = \sin\phi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{7}$$

が導かれる（途中の計算については教科書の 5.3.2 項を参照のこと)。これらを用いると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{8}$$

が得られる。[*1]

[*1] この変形は，複素数を用いると簡単にできる。まず

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(e^{i\phi}\frac{\partial}{\partial\rho} + i\frac{1}{\rho}e^{i\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(e^{-i\phi}\frac{\partial}{\partial\rho} - i\frac{1}{\rho}e^{-i\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{9}$$

であるが，最終結果に虚部が含まれることはないので，展開した際に実数になる項のみを拾って計算すればよい。その結果

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= e^{i\phi}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(e^{-i\phi}\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + i\frac{1}{\rho}e^{i\phi}\frac{\partial e^{-i\phi}}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\rho} + i\frac{1}{\rho}e^{i\phi}\left(-i\frac{1}{\rho}e^{-i\phi}\right)\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \end{aligned} \tag{10}$$

となる。

式（2）で $\rho \to r,\ \phi \to \theta,\ x \to z$ と書き換えたものが式（4）であること，式（3）で $\rho \to r,\ \phi \to \theta,\ y \to \rho$ と書き換えたものが式（1）であることを利用すれば，式（8）で同様の書き換えを行うことにより，

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{11}$$

が得られる。式（8）と式（11）を用いることで，ラプラシアンを

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{12}$$

がと表すことができる。あとは，これを ρ を用いずに表すことができればよい。チェーンルールより

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial r}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial \rho}\frac{\partial}{\partial \theta} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{13}$$

なので，

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{14}$$

である。これを式（12）に代入すると

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) + \frac{1}{r^2}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

となり，教科書の式（5.73）が得られた。