

球面極座標によるラプラシアン of 簡単な導出方法について

佐藤 博彦

2025 年 7 月 2 日

球面極座標 r, θ, ϕ とデカルト座標 x, y, z の関係は、新たな変数

$$\rho = r \sin \theta \quad (1)$$

を用いることにより、以下のように表すこともできる。

$$x = \rho \cos \phi \quad (2)$$

$$y = \rho \sin \phi \quad (3)$$

$$z = r \cos \theta \quad (4)$$

これらの逆変換は

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \phi = \frac{y}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \tan \theta = \frac{\rho}{z} \end{cases} \quad (5)$$

である。このように表すと、 x, y は ρ, ϕ の 2 変数関数、 z は r, θ の 2 変数関数、 ρ は r, ϕ の 2 変数関数なので計算が楽になる。

偏微分のチェーンルールより、まず

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} = \sin \phi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (7)$$

が導かれる（途中の計算については教科書の 5.3.2 項を参照のこと）。これらを用いると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (8)$$

が得られる。^{*1}

^{*1} この変形は、複素数を用いると簡単にできる。まず

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \left(e^{i\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} + i \frac{1}{\rho} e^{i\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(e^{-i\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} - i \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (9)$$

であるが、最終結果に虚部が含まれることはないので、展開した際に実数になる項のみを拾って計算すればよい。その結果

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= e^{i\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(e^{-i\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + i \frac{1}{\rho} e^{i\phi} \frac{\partial e^{-i\phi}}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \rho} + i \frac{1}{\rho} e^{i\phi} \left(-i \frac{1}{\rho} e^{-i\phi} \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。

式 (2) で $\rho \rightarrow r$, $\phi \rightarrow \theta$, $x \rightarrow z$ と書き換えたものが式 (4) であること, 式 (3) で $\rho \rightarrow r$, $\phi \rightarrow \theta$, $y \rightarrow \rho$ と書き換えたものが式 (1) であることを利用すれば, 式 (8) で同様の書き換えを行うことにより,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (11)$$

が得られる。式 (8) と式 (11) を用いることで, ラプラシアンを

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (12)$$

がと表すことができる。あとは, これを ρ を用いずに表すことができればよい。チェーンルールより

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial r}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (13)$$

なので,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (14)$$

である。これを式 (12) に代入すると

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

となり, 教科書の式 (5.73) が得られた。